

Лекция № 8

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Учебные вопросы

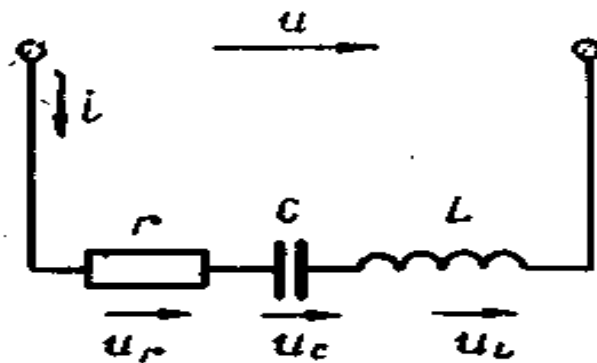
1. Расчет неразветвленных электрических цепей переменного тока (50 мин).
2. Расчет разветвленных электрических цепей переменного тока (40 мин).

1. Расчет неразветвленных электрических цепей переменного тока

Одновременное наличие в цепи активных и реактивных сопротивлений создает смешанную нагрузку источнику переменного тока.

Рассмотрим свойства цепи с последовательным соединением активного сопротивления r , индуктивности L , и емкости C (рис. 1).

Рисунок 1. Цепь переменного тока, содержащая активное



сопротивление, индуктивность и емкость

Пусть в цепи под действием синусоидального напряжения $u = U_m \sin \omega t$ имеет место ток $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$.

Установим:

- связь между входным напряжением U и напряжением на элементах U_r , U_L и U_C ;
- фазовые соотношения между напряжением и током в цепи;
- мощность цепи.

Согласно второму закону Кирхгофа для мгновенных значений получим

$$u = u_r + u_L + u_C, \quad (1)$$

где $u_r = ir$ – падение напряжения на активном сопротивлении;

$u_L = -e_L$ – напряжение, уравнивающее ЭДС самоиндукции;

u_C – напряжение, приложенное к зажимам конденсатора.

Если составляющие уравнения изменяются по закону синуса, то их можно изобразить векторами действующих значений этих напряжений. Векторные диаграммы цепи, соответствующие уравнению (1) для случаев $x_L > x_C$ ($\varphi > 0$) и $x_C > x_L$ ($\varphi < 0$), соответственно представлены на

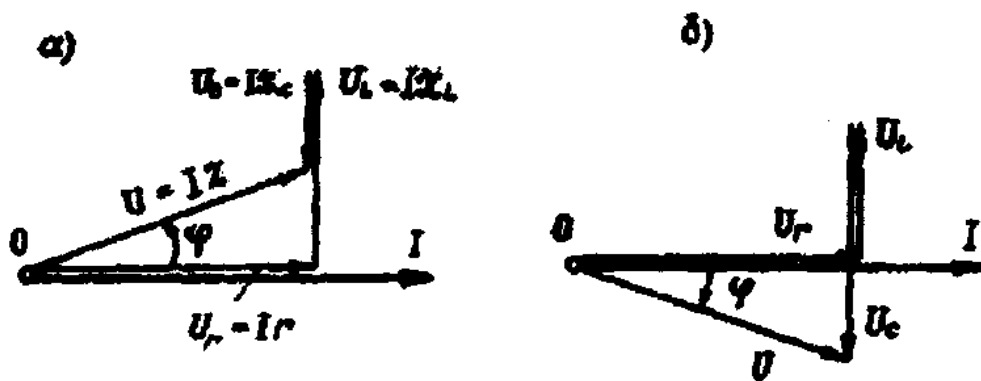


Рисунок 2. Векторные диаграммы:

а – для $x_L > x_C$ ($\varphi > 0$); б – для $x_C > x_L$ ($\varphi < 0$)

На векторной диаграмме, изображенной на рис.2,а, вектор напряжения на активном сопротивлении $U_r = I \cdot r$ совпадает по фазе с вектором тока I , вектор напряжения на индуктивном сопротивлении $U_L = I \cdot x_L$ опережает по фазе вектор тока I на $\pi/2$, а вектор напряжения на емкостном сопротивлении $U_C = I \cdot x_C$ отстает от тока I по фазе на $\pi/2$.

На векторной диаграмме (рис.2,а) выделим прямоугольный треугольник напряжений (рис.3,а). Из этого треугольника находим величину общего напряжения

$$U = \sqrt{U_r^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

Отсюда выражение закона Ома имеет вид

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{Z}, \quad (2)$$

где $x = x_L - x_C$ – реактивное сопротивление цепи;

z – полное сопротивление цепи.

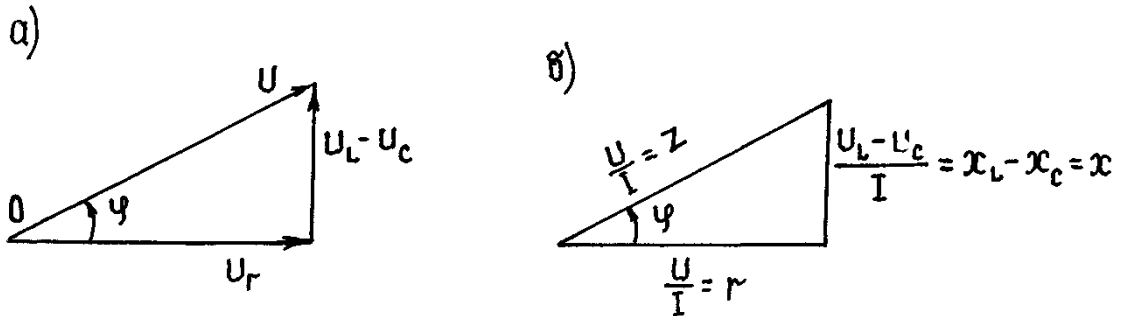


Рисунок 3. Треугольники напряжений и сопротивлений:

а – треугольник напряжений; б – треугольник сопротивлений

Если стороны треугольника напряжений, изображающие действующие значения напряжений U , $U_L - U_C$ и U_r (рис.3,а), поделить на действующее значение тока цепи, то получим так называемый треугольник сопротивлений, как показано на рис.3,б. Из этого треугольника находим следующие соотношения:

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad r = z \cos \varphi; \quad x = z \sin \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L - x_C}{r}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{r}. \quad (3)$$

Знак угла сдвига фаз φ зависит от соотношения реактивных сопротивлений x_L и x_C . Если в цепи преобладает индуктивное сопротивление, реактивное сопротивление $x = x_L - x_C$ выражается положительным числом, угол сдвига фаз $\varphi > 0$ и напряжение цепи опережает ток (рис.2,а). Если в цепи преобладает емкостное сопротивление, реактивное сопротивление $x = x_L - x_C$ выражается отрицательным числом, угол сдвига фаз $\varphi < 0$ и ток цепи опережает напряжение (рис. 2,б).

В общем случае последовательного соединения активных и реактивных сопротивлений (рис. 4), как видно из векторной диаграммы, построенной для произвольных значений активных и реактивных сопротивлений (рис. 5), напряжение цепи равно

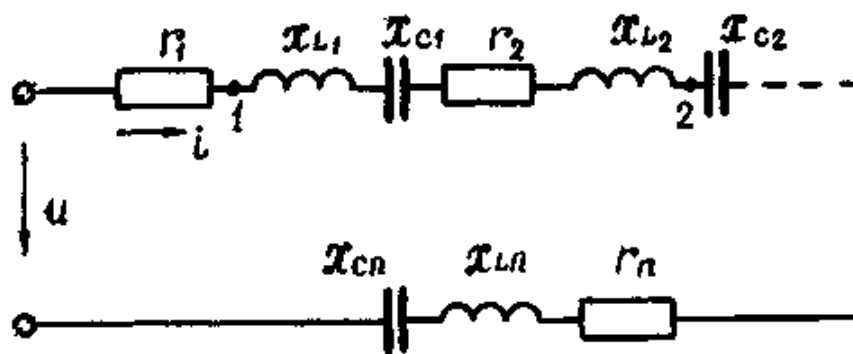


Рисунок 4. Последовательное соединение активных и реактивных сопротивлений (общий случай)

$$U = \sqrt{(\sum U_m)^2 + (\sum U_{Ln} - \sum U_{Cn})^2} = \sqrt{(\sum Ix_n)^2 + (\sum Ix_{Ln} - \sum Ix_{Cn})^2}$$

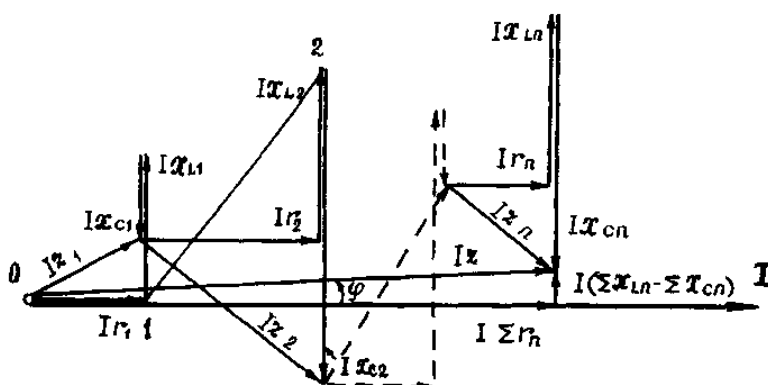


Рисунок 5. Векторная диаграмма цепи с последовательным соединением активных и реактивных сопротивлений (общий случай)

Отсюда

$$I = \frac{U}{\sqrt{(\sum r_n)^2 + (\sum x_{Ln} - \sum x_{Cn})^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{Z}, \quad (4)$$

где $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ — общее активное сопротивление цепи;

$x = (x_{L1} + x_{L2} + x_{Ln}) - (x_{C1} + x_{C2} + x_{Cn})$ – общее реактивное сопротивление цепи;

z – полное сопротивление цепи.

Из векторной диаграммы (рис.5) видно, что угол сдвига фаз между напряжением и током цепи

$$\varphi = \arctg \frac{\sum x_{Ln} - \sum x_{Cn}}{\sum r_n},$$

$$\cos \varphi = \frac{\sum r_n}{z} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{\sum x_{Ln} - \sum x_{Cn}}{z}. \quad (5)$$

Переходные формулы связей сопротивлений и проводимостей

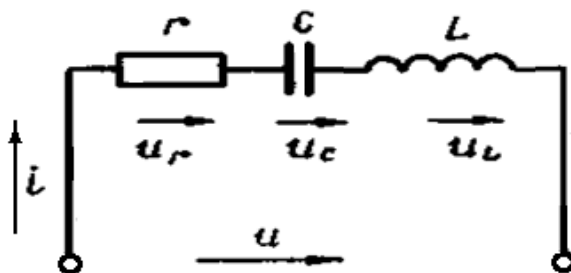


Рисунок 6. К пояснению связей сопротивлений и проводимостей для последовательной цепи

$$I = \frac{U}{Z}; \quad Y = \frac{U}{Z}; \quad Z = \frac{1}{Y}.$$

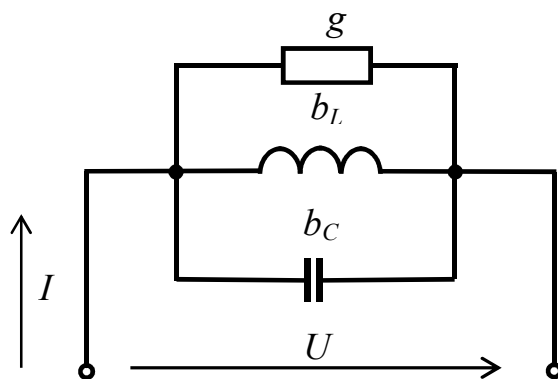


Рисунок 7. К пояснению связей сопротивлений и проводимостей для параллельной цепи

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad Z = \frac{1}{Y}; \quad I = U \cdot Y.$$

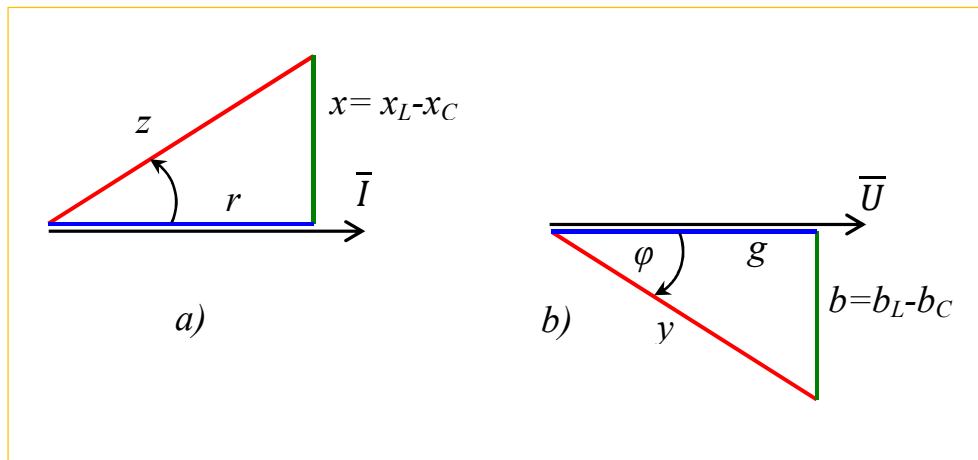


Рисунок 8. Соотношения сопротивлений и проводимостей

Из треугольника сопротивлений (рис. 8,а) следует

$$\sin \varphi = \frac{x}{z};$$

Из треугольника проводимостей (рис. 8,б) следует

$$\sin \varphi = \frac{b}{y};$$

Приравнивая правые части равенств получаем:

$$\frac{x}{z} = \frac{b}{y}.$$

Решая эту пропорцию относительно x находим

$$x = \frac{b}{y} \cdot z = \frac{b}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{b}{y^2}.$$

Решая эту же пропорцию относительно b находим

$$b = \frac{x}{z} \cdot y = \frac{x}{z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{z^2}.$$

Из треугольника сопротивлений (рис. 8,а) следует

$$\cos \varphi = \frac{r}{z};$$

Из треугольника сопротивлений (рис. 8,b) следует

$$\cos \varphi = \frac{g}{y};$$

Приравнивая правые части выражений для $\cos \varphi$ получаем:

$$\frac{r}{z} = \frac{g}{y}.$$

Решая эту пропорцию относительно r находим:

$$r = \frac{g}{y} \cdot z = \frac{g}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{g}{y^2}.$$

Решая эту же пропорцию относительно g находим

$$g = \frac{r}{z} \cdot y = \frac{r}{z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{r}{z^2}.$$

Из выражения для x получаем

$$x = \frac{b}{y^2} = \frac{b_L - b_C}{y^2}.$$

Из выражения для b получаем

$$b = \frac{x}{z^2} = \frac{x_L - x_C}{z^2}.$$

2. Расчет разветвленных электрических цепей переменного тока

Рассмотрим свойства цепи с параллельным соединением активного сопротивления r , индуктивности L , и емкости C (рис. 9).

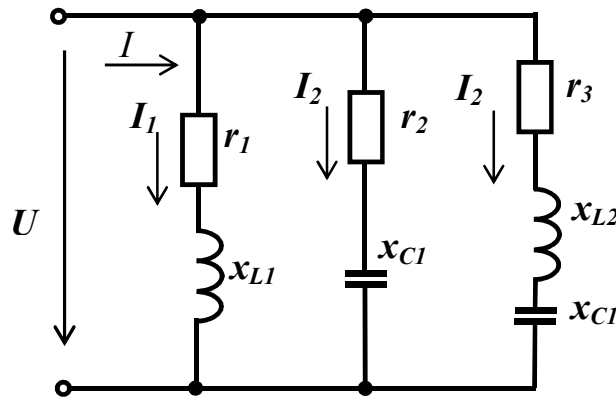


Рисунок 9. Разветвленная электрическая цепь переменного тока

Алгоритм расчета цепи

1. Находим эквивалентные активную и реактивную проводимости цепи:

а) Определяем активные проводимости *каждой из трех* ветвей цепи:

1-я ветвь

$$g_1 = \frac{r_1}{z_1^2} = \frac{r_1}{r_1^2 + x_{L1}^2} ;$$

2-я ветвь

$$g_2 = \frac{r_2}{z_2^2} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_{C2}^2} ;$$

3-я ветвь

$$g_3 = \frac{r_3}{z_3^2} = \frac{r_3}{r_3^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2}.$$

Активная проводимость всей цепи равна

$$g = g_1 + g_1 + g_1 = \Sigma g_n.$$

б) Определяем реактивные проводимости *каждой из трех* ветвей цепи.

Реактивные проводимости *отдельных* ветвей в отличие от активных проводимостей являются *алгебраическими* величинами.

1-я ветвь

$$b_1 = \frac{x_1}{z_1^2} = \frac{x_{L1}}{r_1^2 + x_{L1}^2}.$$

И поскольку $x_1 = x_{L1} = \omega L_1 > 0$ то $b_1 = b_{L1} > 0$.

2-я ветвь

$$b_2 = \frac{x_2}{z_2^2} = \frac{-x_{C2}}{r_2^2 + x_{C2}^2}.$$

И поскольку $x_2 = -x_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} < 0$ то $b_2 = -b_{C2} < 0$.

3-я ветвь

$$b_3 = \frac{x_{32}}{z_3^2} = \frac{x_{L3} - x_{C3}}{r_3^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2}.$$

Реактивная проводимость всей цепи также является *алгебраической* величиной.

$$b = b_1 + b_2 + b_3 = \Sigma b_n.$$

Полная проводимость всей цепи

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

2. Угол сдвига фаз между общим сопротивлением и общим током находится из соотношения

$$tg\varphi = \frac{b}{y}.$$

В зависимости от знака b т.е. в зависимости от того, какой характер (активный или индуктивный) имеет реактивная проводимость угол φ может быть «+» или «-».

Следовательно, общий ток может отставать или опережать приложенное напряжение по фазе в зависимости от знака общей реактивной проводимости.

Аналогично определяются углы сдвига фаз φ_1 , φ_2 и φ_3 токов в ветвях относительно общего напряжения U . В ветвях с индуктивной реактивной прово-

димостью угол сдвига фаз положителен, в таких ветвях напряжение опережает ток по фазе.

В ветвях с емкостной реактивной проводимостью напряжение отстает по фазе от тока, а угол сдвига фаз отрицателен.

На рис. 10 представлена диаграмма проводимостей для представленной цепи. При построении диаграммы предполагалось, что $x_{L3} - x_{C3}$ (т.е. $b_3 < 0$) и что общая реактивная проводимость b - отрицательная.

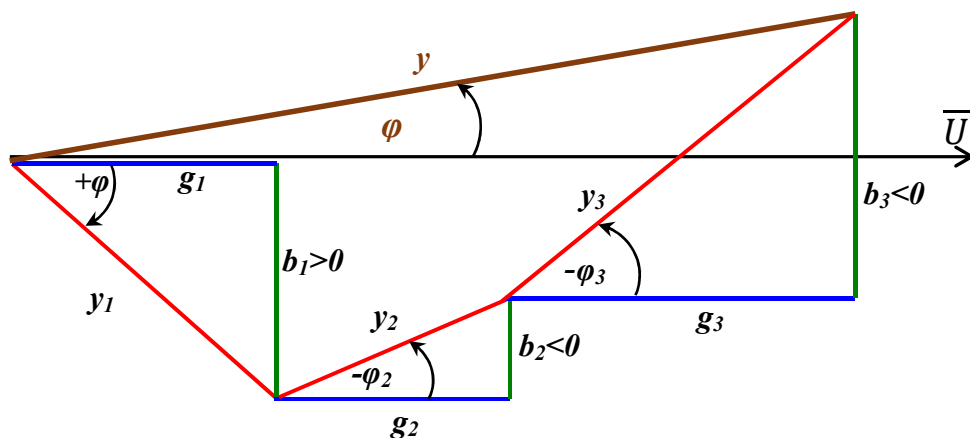


Рисунок 10. Диаграмма проводимостей для представленной цепи

Из диаграммы видно, что полная проводимость цепи с параллельно соединенными ветвями **меньше** арифметической суммы полных проводимостей отдельных ветвей, т.е.

$$y < y_1 + y_2 + y_3 \dots$$

Так как токи пропорциональны полным проводимостям, то

$$I < I_1 + I_2 + I_3 \dots$$

Активная мощность все цепи

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U^2 g_1 + U^2 g_2 + U^2 g_3 = U^2 \Sigma g_n = U^2 \Sigma g.$$

Реактивная мощность все цепи

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U^2 b_1 + U^2 b_2 + U^2 b_3 = U^2 \Sigma b_n = U^2 \Sigma b.$$

Полная мощность все цепи

$$S = U^2 y.$$